

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1^ο

A. α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x) = -\eta\mu x$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

β) Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Να δώσετε τον ορισμό: Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο A .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0 .

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0) > 0$.

δ) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx > 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$.

στ) Αν η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}, a > 0$.

A. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y = 0$, να βρείτε την τιμή του a .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Για $a = 1$:

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ) Να αποδείξετε: ότι $(\sqrt{\kappa})^{\sqrt{\kappa+1}} > (\sqrt{\kappa+1})^{\sqrt{\kappa}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa \geq 8$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 3ο

Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i$ και $w = f(\alpha) + i \cdot f(\beta)$ με $f(\beta) \neq 0$.

A. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $z_1 = \frac{1 + \beta - i \cdot \bar{z}}{1 + f(\beta) - i \cdot w}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f(\alpha) = a$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Αν $z = -iw$ τότε οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή 0 των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Έστω ότι ισχύει $|z - iw|^2 = |z|^2 + |iw|^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(\alpha) = 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Οι εικόνες των z, w και η αρχή 0 είναι συνευθειακά σημεία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x)$ συνεχή στο $\mathbf{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$\int_0^x (t^2 + 1) \cdot f''(t) dt = 2 \int_x^0 t \cdot f'(t) dt - 4 \int_0^1 x \cdot t \cdot f(x) dt \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \text{ με}$$

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbf{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = a > 0$.

Αν το a μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{10}{3} \text{ cm/sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία $a = 3 \text{ cm}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)| \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g όταν $x \rightarrow +\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$, να αποδείξετε ότι: $E \leq \ln 5$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. α) Λάθος διότι η f είναι «1-1» που σημαίνει δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.

β) Σωστό διότι $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ άρα $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

γ) Σωστό διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(a) - f(\beta)}{a - \beta} > 0 \text{ διότι } f \uparrow \text{ άρα } f(a) < f(\beta)$$

δ) Λάθος διότι $f''(x) \geq 0, x \in \Delta$. (Παράδειγμα: για την $f(x) = x^4$ είναι:

$$f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in R)$$

ε) Σωστό διότι αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ (άτοπο)

στ) Σωστό διότι αν η f δεν παίρνει 2 τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Όμως η f δεν είναι παντού ίση με μηδέν, οπότε

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0 \text{ άτοπο.}$$

Θέμα 2ο

Α. $A = (0, +\infty)$ πεδίο ορισμού

$$f'(x) = \frac{(\ln(ax))' \cdot \sqrt{x} - \ln(ax) \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{ax} \cdot (ax)' \cdot \sqrt{x} - \ln(ax) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln(ax)}{2x\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(1) = \frac{2 - \ln a}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \ln a = 2 \Leftrightarrow \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

B. α) Για $\alpha=1$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0 \text{ και } f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

$\swarrow \quad \searrow$
max

$$f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e} (\text{max})$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \right] = +\infty (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{Άρα } f((0, e^2]) = \left(-\infty, \frac{2}{e}\right] \text{ και } f([e^2, +\infty)) = \left[\frac{2}{e}, 0\right)$$

Η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\gamma) \ln(\sqrt{\kappa})^{\sqrt{\kappa+1}} > \ln(\sqrt{\kappa+1})^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\kappa+1} \cdot \ln \sqrt{\kappa} > \sqrt{\kappa} \cdot \ln \sqrt{\kappa+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\kappa+1} \cdot \ln \kappa > \sqrt{\kappa} \cdot \ln(\kappa+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \kappa}{\sqrt{\kappa}} > \frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}} \Leftrightarrow$$

$$f(\kappa) > f(\kappa+1) \text{ ισχύει διότι}$$

$$\kappa+1 > \kappa \geq 8 > e^2 \text{ και } f \downarrow \text{ στο } [e^2, +\infty)$$

Θέμα 3ο

$$\begin{aligned} \text{A. } \alpha) \quad z_1 &= \frac{1 + \beta - i(a - \beta i)}{1 + f(\beta) - i[f(a) - i \cdot f(\beta)]} = \frac{1 - i \cdot a}{1 - i \cdot f(a)} = \\ &= \frac{(1 - i \cdot a)(1 + i \cdot f(a))}{[1 - i \cdot f(a)] \cdot [1 + i \cdot f(a)]} = \frac{(1 + a \cdot f(a)) + i(-a + f(a))}{1 + f^2(a)} \end{aligned}$$

$$z_1 \in \mathbb{R} \text{ αν και μόνο αν } -a + f(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = a$$

β) Ισχύει $z = -iw \Leftrightarrow a + \beta i = -i(f(a) + i \cdot f(\beta)) \Leftrightarrow a + \beta i = f(\beta) - if(a)$ οπότε $f(a) = -\beta$ και $f(\beta) = a$. Άρα $w = -\beta + \alpha \cdot i$. Έστω $A(a, \beta)$ και $B(-\beta, a)$. Είναι $(OA) = \sqrt{a^2 + \beta^2}, (OB) = \sqrt{a^2 + \beta^2}$ δηλαδή $\overset{\triangleright}{O}AB$ ισοσκελές.

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } (AB)^2 &= (a + \beta)^2 + (a - \beta)^2 = \\ &= a^2 + \beta^2 + 2a\beta + a^2 + \beta^2 - 2a\beta = 2(a^2 + \beta^2) = (OA)^2 + (OB)^2 \end{aligned}$$

το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

$$\text{B. } \alpha) \text{ Έχουμε } |a + \beta i - i(f(a) + if(\beta))|^2 = |a + \beta i|^2 + |if(a) - f(\beta)|^2$$

$$|a + f(\beta) + i(\beta - f(a))|^2 = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$(a + f(\beta))^2 + (\beta - f(a))^2 = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$a^2 + f^2(\beta) + 2a \cdot f(\beta) + \beta^2 + f^2(a) - 2\beta \cdot f(a) = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$2a \cdot f(\beta) - 2\beta \cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) = 0$$

β) Έστω $A(a, \beta)$ και $B(f(a), f(\beta))$

$$\lambda_{OA} = \frac{\beta}{a} \text{ και } \lambda_{OB} = \frac{f(\beta)}{f(a)} \text{ οι συντελεστές διεύθυνσης } OA \text{ και } OB \text{ αντίστοιχα}$$

Λόγω της (1) είναι $\lambda_{OA} = \lambda_{OB}$ που σημαίνει A, O, B συνευθειακά.

(Είναι $f(a) \neq 0$ διότι αν $f(a) = 0$ τότε και $f(\beta) = 0$ άτοπο)

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η οποία διέρχεται από το $(0, 0)$ όταν $-f(x_0) = -x_0 \cdot f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) η εξίσωση

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0.$$

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [a, \beta]$$

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και
- $g(a) = \frac{f(a)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta} = g(\beta)$ λόγω της (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (a, β) η εξίσωση $g'(x) = 0$ δηλαδή η ισοδύναμη της $x \cdot f'(x) - f(x) = 0$

Θέμα 4ο

$$\begin{aligned} \alpha) \int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt &= -2 \int_0^x t f'(t) dt - 4x \cdot f(x) \cdot \int_0^1 t dt \\ \int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt &= -2 \int_0^x t \cdot f'(t) dt - 4x \cdot f(x) \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ \int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt &= -2 \int_0^x t \cdot f'(t) dt - \frac{4}{2} x \cdot f(x) \quad (1) \end{aligned}$$

Με παραγωγή των μελών της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1) f''(x) &= -2x \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x \cdot f'(x) \\ (x^2 + 1) f''(x) + 2x \cdot f'(x) &= -2f(x) - 2x \cdot f'(x) \\ \left[(x^2 + 1) f'(x) \right]' &= \left[-2x \cdot f'(x) \right]', \text{ άρα } (x^2 + 1) f'(x) = -2x \cdot f(x) + C_1 \quad (2) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = C_1$ άρα $C_1 = 2$

Η (2) γράφεται:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1) f'(x) + 2x \cdot f(x) &= 2 \\ \left[(x^2 + 1) f'(x) \right]' &= (2x)' \quad \text{Άρα } (x^2 + 1) \cdot f(x) = 2x + C_2 \end{aligned}$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = C_2$ άρα $C_2 = 0$. Επομένως $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

β' μέθοδος

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned} \left[(t^2 + 1) f'(t) \right]_0^x - \int_0^x 2t f'(t) dt &= -2 \int_0^x t f'(t) dt - 4x f(x) \int_0^1 t dt \Leftrightarrow \\ (x^2 + 1) f'(x) - f'(0) &= -4x \cdot f(x) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow \\ (x^2 + 1) f'(x) - 2 &= -2x \cdot f(x) \Leftrightarrow \\ (x^2 + 1) f'(x) + 2x \cdot f(x) &= 2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left[(x^2 + 1)f(x) \right]' = (2x)'$$

$$\text{Άρα } (x^2 + 1)f(x) = 2x + c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f(0)=c \text{ δηλαδή } c=0 \text{ οπότε } (x^2 + 1)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\beta) E(a) = \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int_0^a (\ln(x^2 + 1))' dx = \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^a = \ln(a^2 + 1).$$

Το a είναι συνάρτηση του χρόνου οπότε:

$$E'(a) = \left[\ln(a^2(t) + 1) \right]' = \frac{1}{a^2(t) + 1} (a^2(t) + 1)' = \frac{2a(t) \cdot a'(t)}{a^2(t) + 1}.$$

$$\text{Είναι } a'(t) = \frac{10}{3} \text{ cm/sec και } a(t) = 3 \text{ cm, άρα } E'(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{10}{3}}{9 + 1} \text{ cm}^2 / \text{sec} = 2 \text{ cm}^2 / \text{sec}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(a)$ όταν $a = 3 \text{ cm}$.

γ) i) Αφού $x \rightarrow +\infty$ για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$-|f(x)| \leq g(x) + x - 2 \leq |f(x)|$$

$$-\frac{2x}{x^2 + 1} \leq g(x) - (-x + 2) \leq \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 2)] = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y = -x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

$$\text{ii) Είναι } E = \int_0^2 |g(x) - (-x + 2)| dx = \int_0^2 |g(x) + x - 2| dx \text{ και}$$

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)| \text{ (ερώτημα i)}$$

$$|g(x) + x - 2| - |f(x)| \leq 0. \text{ Άρα}$$

$$\int_0^2 [|g(x) + x - 2| - |f(x)|] dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 |g(x) + x - 2| dx - \int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \ln 5 \leq 0 \Leftrightarrow E \leq \ln 5$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε το θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

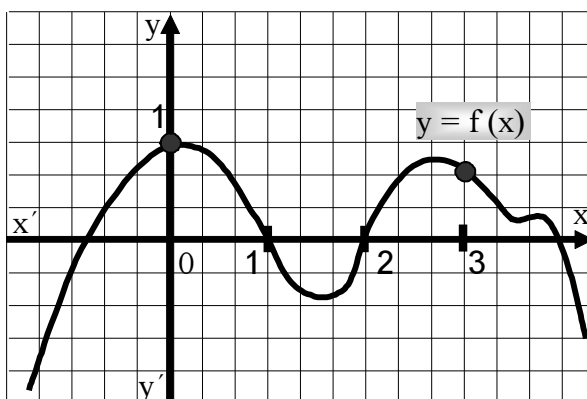
- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Η συνάρτηση f , που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με συνεχή δεύτερη παράγωγο.



Να βρείτε, αν η τιμή των ολοκληρωμάτων I_1 , I_2 , I_3 είναι θετική ή αρνητική.

$$I_1 = \int_0^3 f(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$$I_2 = \int_0^3 f'(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$$I_3 = \int_0^3 f''(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα όρια της στήλης Α με την τιμή του της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}$	α. $-\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$	β. 0
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$	γ. 1
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$	δ. $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε, ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2°.

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) - g'(x) = 1, \quad f'(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν στο όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου,

παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

α. i) Να υπολογίσετε το όριο L .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 3°

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{2}{\alpha + e^t} dt$, $\alpha > 0$ και τον μιγαδικό

$$z = g(x) + xi \text{ με } |\bar{z} + i| \leq |z - 1|.$$

A. Να αποδείξετε, ότι i) η g αντιστρέφεται και ii) οι εικόνες του z ανήκουν στην γραφική παράσταση της g^{-1} . ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B. Να αποδείξετε, ότι:

α. $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. $\alpha = 1$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ. $\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{\alpha + e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{\alpha + e^t} dt < \frac{1}{1+e}$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 4°

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=1$ και

$$f'(x) = g^2(x) \neq 0, \quad f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(x) = -g(x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1. ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$. ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$, $x=1$, να δείξετε, ότι $E = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 194: Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
B. $I_1 > 0$ Δες σχόλιο σελίδα 346.
 $I_2 = f(3) - f(0) < 0$ γιατί $f(3) < f(0)$
 $I_3 = f'(3) - f'(0) < 0$ γιατί η κλίση της C_f στο $(3, f(3))$ είναι αρνητική και στο $(0, f(0))$ είναι θετική.
Γ. $1 \rightarrow \gamma$
 $2 \rightarrow \beta$
 $3 \rightarrow \alpha$
 $4 \rightarrow \delta$
Δ. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 224 στίχοι 1 έως 8.

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0$ (1) και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = 0$ (2)

α. i) Το κλάσμα $\frac{g'(x)}{f'(x)-1}$ ορίζεται σε διάστημα Δ της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αφού $f'(x) \neq 1$. Στο Δ είναι

$$\frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'} = \frac{g'(x)}{f'(x)-1}$$

Ακόμα: $f'(x) - g'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(x) = f'(x) - 1$, οπότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)-1} = 1$.

Από το πρώτο θεώρημα του De l'Hospital προκύπτει:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)+2}{f(x)-x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)-1} = 1.$$

ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -2$.

Πάλι, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x+2$

β) Έστω ότι η g έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 στο $\mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$. (απόδειξη με άτοπο)
Εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ γιατί, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , και ακόμα
- $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Τότε: $f'(\xi) - g'(\xi) = 1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$. Άτοπο, γιατί $f'(x) \neq 1$. Έτσι, η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

γ) Έχουμε $f'(x) - g'(x) = x \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (x)'$, άρα, από τις συνέπειες του Θ. Μ. Τ. του διαφορικού λογισμού, υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x) - g(x) = x + c$ (1) ή

$$f(x) - x - 2 = g(x) + 2 + c - 4. \quad (2)$$

Επειδή υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(g(x) + 2) + c - 4] = 0 + c - 4$, από την (2)

είναι ίσα. Προκύπτει, επομένως: $0 = c - 4$ ή $c = 4$. Άρα, είναι: $f(x) - g(x) = x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

[Στην (1) καταλήγουμε και με ολοκλήρωση των δύο μελών της $f'(x) - g'(x) = x$]

ΘΕΜΑ 3ο

A. i) Επειδή, προφανώς, η $f(t) = \frac{2}{a+e^t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \frac{2}{a+e^x} > 0, \text{ επομένως, η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα και σαν τέτοια είναι 1-1 και αντιστρέφεται.}$$

ii) Η C_g είναι το σύνολο των σημείων $(x, g(x))$ με $x \in \mathbb{R}$, άρα η C_g^{-1} είναι το σύνολο των σημείων $(g(x), x)$ και σ' αυτήν ανήκουν οι εικόνες $M(g(x), x)$ του $z = g(x) + xi$, $x \in \mathbb{R}$

B. α) Έχουμε κατά σειρά

$$\begin{aligned} |\bar{z} + i| \leq |z - 1| &\Leftrightarrow |g(x) - xi + i| \leq |g(x) + xi - 1| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + (1-x)^2} \leq \sqrt{(g(x)-1)^2 + x^2} \\ &\Leftrightarrow \dots -2x \leq -2g(x) \Leftrightarrow g(x) \leq x \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z), x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $h(x) = g(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Από το **Bα** είναι $g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ακόμα, $g(0) = \int_0^0 \frac{2}{a+e^t} dt = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$, έτσι η h έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) για $x=0$.

$$\text{Είναι } h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{2}{a+e^x} - 1, x \in \mathbb{R}$$

Επειδή το $x=0$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h και η h παραγωγίζεται σ' αυτό, από το θεώρημα του Fermat προκύπτει: $h'(0)=0$ ή ισοδύναμα $\frac{2}{a+e^0} - 1 = 0 \Leftrightarrow a=1$.

γ. Επειδή η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$. Από το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού, υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ με

$$\begin{aligned} \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} &= g'(\xi) \quad \text{ή} \\ \int_0^2 \frac{2}{a+e^t} dt - \int_0^1 \frac{2}{a+e^t} dt &= \frac{2}{a+e^\xi} \quad \text{ή} \\ \int_0^2 \frac{1}{a+e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t} dt &= \frac{1}{a+e^\xi} \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή $\xi \in (1, 2)$ είναι διαδοχικά:

$$1 < \xi < 2 \quad \text{ή}$$

$$e < e^\xi < e^2 \quad [e^x \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}] \quad \text{ή}$$

$$1+e < 1+e^\xi < 1+e^2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{1+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{a+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad [a=1]$$

και η (1) δίνει το ζητούμενο:

$$\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{a+e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t} dt < \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) i) Είναι $f^2(x) + g^2(x) = 1$ (1), $x \in \mathbb{R}$
 και $f'(x) = g^2(x) \neq 0$ (2), $x \in \mathbb{R}$

οπότε:

$$\begin{aligned} & (f^2(x) + g^2(x))' = 0 \\ \text{ή} & 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0 \\ \text{ή} & 2f(x)g^2(x) + 2g(x)g'(x) = 0 \end{aligned}$$

και επειδή $g(x) \neq 0$ είναι $f(x)g(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Επειδή η g δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0) = 1 > 0$, άρα:

$$g(x) > 0 \quad (3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γιατί από την (2): $f'(x) = g^2(x) > 0$.

$$\text{Από την (1): } f^2(0) + g^2(0) = 1 \Leftrightarrow f^2(0) + 1 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 0. \quad (4)$$

Έτσι,

- για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Η $g'(x) = -g(x)f(x)$, λόγω της (3), έχει για κάθε $x \neq 0$ αντίθετο πρόσημο της $f(x)$, που σημαίνει ότι

- για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Άρα, η g , ως συνεχής στο $x_0=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) το $g(0) = 1$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

β) i) Λόγω της (3) ισχύει η ισοδυναμία:

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g^2(x_1) < g^2(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2), \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

που σημαίνει, τελικά, ότι η f' έχει ίδια μονοτονία με την g . Επομένως, η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Άλλος τρόπος. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη και η g^2 , άρα από την (2) και η f' , που σημαίνει ότι υπάρχει η f'' . Τότε:

$f''(x) = (f'(x))' = (g^2(x))' = 2g(x)g'(x)$ έτσι, από την (3), η $f''(x)$ για κάθε $x \neq 0$ έχει ίδιο πρόσημο με την $g'(x)$:

- για $x < 0$ είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ προκύπτει, ότι είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή $y = f'(0) \cdot x$ ή $y = x$ αφού από την (2) έπεται $f'(0) = 1$.

γ. Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα σημεία της εφαπτομένης της $y=x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, επομένως: $x \geq f(x) \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } E &= \int_0^1 |x - f(x)| dx = \int_0^1 (x - f(x)) dx \stackrel{(α)}{=} \int_0^1 \left(x + \frac{g'(x)}{g(x)} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln |g(x)| \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln |g(1)| - \frac{0}{2} - \ln |g(0)| \\ &= \frac{1}{2} + \ln |g(1)| - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln [g(1)]. \quad [\text{γιατί } g(1) > 1 \text{ από την (3)}] \end{aligned}$$



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 9

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Μονάδες 6

Γ. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $<< 1 - 1 >>$ αν και μόνο αν για κάθε

$x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 .

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.

5. Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο

$[a, \beta]$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2)$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Μονάδες 3

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

Μονάδες 8

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

$$\text{παράσταση της συνάρτησης } g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \text{ τον άξονα } x'x \text{ και τις ευθείες } x = \frac{1}{e}$$

$$\text{και } x = e^2.$$

Μονάδες 10**Θέμα 3^ο**

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (x - 1)i$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός

$$w = z^2 + z + 2i \text{ να είναι πραγματικός.}$$

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 9**Θέμα 4^ο**

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = \frac{1}{2}$

$$\text{και } e^x [f(x) + f'(x)] + \eta \mu x = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\sigma \upsilon \nu x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$$f(x) + f(-x) = \sigma \upsilon \nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι: $0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

Γ. 1 – (Λάθος) – 2 (Σωστό) – 3 (Λάθος) 4 (Λάθος) διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιος ώστε } f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0 \text{ διότι } \alpha < \beta \text{ και}$$

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

5 (Λάθος) διότι: αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx > 0$

Θέμα 2^ο

α) Για κάθε $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x - 2 + 2) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \right] = -\infty$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

γ) Για κάθε $x > 0$, $f''(x) = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{Είναι } 2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
F(x)	κυρτή	Σ.Κ	κοίλη

$$f(e^2) = 2e(\ln e^2 - 2) = 0$$

$M(e^2, 0)$ το σημείο καμπής

$$\begin{aligned} \delta) E &= \int_{1/e}^{e^2} \left| \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_{1/e}^1 -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left[-2\sqrt{x}(\ln x - 2) \right]_{1/e}^1 + \left[2\sqrt{x}(\ln x - 2) \right]_1^{e^2} = \\ &= -2(-2) + \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\ln \frac{1}{e} - 2 \right) + 2e \cdot (\ln e^2 - 2) - 2(-2) \\ &= 8 + \frac{2}{\sqrt{e}}(-1 - 2) + 2e(2 - 2) = 8 - \frac{6}{\sqrt{e}} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Θέμα 3^ο

$$\alpha) \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow e^x > x - 1 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$$

Έστω $f(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbf{R}$. Τότε $f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		-	+
F(x)		2	

Η f για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το 2. Άρα $f(x) \geq f(0) = 2 > 0$ δηλαδή

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \beta) w &= \left[e^x + (x-1)i \right]^2 + e^x + (x-1)i + 2i = \\ &= e^{2x} + 2i(x-1) \cdot e^x - (x-1)^2 + e^x + (x-1)i + 2i = \\ &= e^{2x} + e^x - (x-1)^2 + i \left[2(x-1)e^x + x+1 \right] \end{aligned}$$

Έστω $g(x) = 2(x-1)e^x + x+1, x \in [0,1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $g(0) = -2 + 1 = -1$
 $g(1) = 1 + 1 = 2$ Άρα $g(0) \cdot g(1) < 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $0 = W$ να είναι πραγματικός.

γ) $|z| = \sqrt{e^{2x} + (x-1)^2}$ το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση

$h(x) = e^{2x} + (x-1)^2$ έχει ελάχιστο.

$h'(x) = 2e^{2x} + 2(x-1)$. Προφανής λύση είναι η $x=0$ διότι

$h'(0) = 2 - 2 = 0$. Είναι $h''(x) = 4e^{2x} + 2 > 0$. Άρα η $h'(x) \uparrow$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
$H(x)$		min	

Για κάθε $x < 0$ ισχύει $h'(x) < h'(0) = 0$ και για κάθε $x > 0$

ισχύει $h'(x) > h'(0) = 0$. Επομένως η $h(x)$ έχει ελάχιστο στο $x=0$.

Συνεπώς ο μιγαδικός $z = e^0 + (0-1)i = 1 - i$ έχει το μικρότερο μέτρο.

Θέμα 4^ο

α) $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) + f'(x) = -\eta \mu x$

$$\left[e^x \cdot f(x) + f(x) \right]' = (\sigma \nu x)'$$

Άρα υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$e^x \cdot f(x) + f(x) = \sigma \nu x + c, x \in \mathbf{R}$$

$$(e^x + 1) \cdot f(x) = \sigma \nu x + c.$$

Για $x=0$ είναι $2f(0) = \sigma \nu 0 + c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $f(x) = \frac{\sigma \nu x}{1 + e^x}, x \in \mathbf{R}$

Έχουμε $f(x) + f(-x) = \frac{\sigma \nu x}{1 + e^x} + \frac{\sigma \nu x}{1 + e^{-x}} = \dots = \sigma \nu x \quad (1)$

β) $-\frac{1}{1 + e^x} \leq \frac{\sigma \nu x}{1 + e^x} \leq \frac{1}{1 + e^x}, x \in \mathbf{R}$ διότι $-1 \leq \sigma \nu x \leq 1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

γ) Με ολοκλήρωση των μελών της (1) παίρνουμε

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma \nu x dx \quad (2)$$

Στο $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)dx$ θέτουμε $x = -u$ οπότε $dx = -du$.

Για $x = -\pi/2$ είναι $u = \pi/2$ και για $x = \pi/2$ είναι $u = -\pi/2$

$$\text{Άρα } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)du = - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(u)du.$$

Η (2) γράφεται:

$$I + I = [\eta \mu x]_{-\pi/2}^{\pi/2} \Leftrightarrow 2I = \eta \mu \pi/2 - \eta \mu(-\pi/2) = 1 + 1 = 2$$

Επομένως $I = 1$.

δ) Βρίσκουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x) = \frac{-\eta \mu x \cdot (1 + e^x) - \sigma \nu x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{\eta \mu x \cdot (1 + e^x) + e^x \cdot \sigma \nu x}{(1 + e^x)^2} < 0$$

για κάθε $x \in [0, \pi/2]$. Άρα $f \downarrow$ στο $[0, \pi/2]$ οπότε $f(0) = \frac{1}{2}$ η μέγιστη

τιμή και $f(\pi/2) = 0$ η ελάχιστη.

$$\text{Ισχύει } 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \text{ απ' όπου προκύπτει ότι } 0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}.$$



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

A. α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 11

β) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό ή Λάθος**.

α) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\ll 1 - 1 \gg$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $f(x) \neq 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ , τότε $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ και $a < \beta$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \frac{z+i}{1+iz}$ όπου $z \neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$

Μονάδες 5

β) Αν $|z|=1$ και M η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε την ισοδυναμία: w φανταστικός $\Leftrightarrow z$ φανταστικός.

Μονάδες 7

δ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[a, \beta]$ με $f(a) > 1$ και έστω $z = f(a) \cdot i$ και $w = f(\beta) \cdot i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

Μονάδες 7**Θέμα 3**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax - 1$ όπου $a > 1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

Μονάδες 8

γ) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $(0, f(0))$ και την ευθεία $x = a > 1$.

i) Να αποδείξετε ότι: $E(a) = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1$.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε το $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

Μονάδες 6

Θέμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και έστω

$$g(x) = \int_0^1 t \cdot f(xt) dt, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t \cdot f(t) dt$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

γ) $x \cdot g(x) < \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

δ) Αν $\int_1^2 t \cdot f(t) dt = 3 \int_0^1 t \cdot f(t) dt$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$

τέτοιος ώστε: $2g(\xi) = f(\xi)$.

Μονάδες 6



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Β) α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Θέμα 2

$$\alpha) \left| \frac{w-i}{w+i} \right| = \left| \frac{\frac{z+i}{1+iz} - i}{\frac{z+i}{1+iz} + 1} \right| = \left| \frac{z+i-i-i^2z}{z+i+i+i^2z} \right| = \left| \frac{2z}{2i} \right| = |z|$$

β) Λόγω (α) ερωτήματος έχουμε: $|w-i| = |w+i|$. Αν $w = x + yi$ τότε

$$|x + yi - i| = |x + yi + i| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |x + (y+1)i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα το σημείο M ανήκει στον x'x.

$$\gamma) w \in I \Leftrightarrow w = -\bar{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = -\frac{\bar{z}-i}{1-iz} \Leftrightarrow$$

$$(z+i)(1-i\bar{z}) = -(1+iz) \cdot (\bar{z}-i) \Leftrightarrow$$

$$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -(\bar{z}+iz\bar{z}-i+z) \Leftrightarrow$$

$$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -\bar{z}-iz\bar{z}+i-z \Leftrightarrow 2z = -2\bar{z} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in I.$$

$$\delta) \text{ Έχουμε } f(\beta)i = \frac{f(a)i+i}{1+i^2f(a)} \Leftrightarrow f(\beta) = \frac{f(a)+1}{1-f(a)} < 0 \text{ διότι } f(a) > 1$$

Άρα $f(a) \cdot f(\beta) < 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Θέμα 3

α) $f'(x) = e^x - a$ οπότε $f'(0) = 1 - a$

$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow$

$y = (1 - a)x$

β) Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq a \Leftrightarrow x \geq \ln a$

x	$-\infty$	$\ln a$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Η f στο $x_0 = \ln a$ παρουσιάζει ελάχιστο το

$g(a) = e^{\ln a} - a \ln a - 1 = a - a \ln a - 1$

Επειδή $g'(a) = 1 - \ln a - 1 = -\ln a < 0$ για κάθε $a \in (1, +\infty)$ και g συνεχής στο $[1, +\infty)$ η g είναι $\downarrow$ στο $[1, +\infty)$ οπότε για κάθε $a > 1$ ισχύει $g(a) < g(1) = 0$

γ) i) $E(a) = \int_0^a |f(x) - (1 - a)x| dx$. Επειδή η f είναι κυρτή διότι

$f''(x) = e^x > 0$ και η $\psi = (1 - a)x$ εφαπτομένη της c_f στο $(0, f(0))$,

ισχύει :

$f(x) \geq (1 - a)x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $E(a) = \int_0^a (e^x - ax - 1 - x + ax) dx = \int_0^a (e^x - x - 1) dx$

$= \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^a = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1$ τ.μ.

ii) $E(a) = a^2 \left(\frac{e^a}{a^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \right)$. Είναι $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{a^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(e^a)'}{(a^2)'}$

$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{2a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(e^a)'}{(2a)'} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{2} = +\infty$. Επομένως $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a) = +\infty$

Θέμα 4

α) Θέτουμε $x \cdot t = u$ τότε $(xt)'dt = du \Leftrightarrow x dt = du$ οπότε

για κάθε $x \neq 0$ είναι $dt = \frac{1}{x} du$

- Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = 1$ είναι $u = x$.

$$\text{Άρα } g(x) = \int_0^x \frac{u}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot f(u) dx = \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u) du$$

Επειδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής ολοκλήρωσης, έχουμε.

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt, \quad x \neq 0$$

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, όταν $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

$$\text{Είναι } g(0) = \int_0^1 t f(0) dt = f(0) \int_0^1 t dt = f(0) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} f(0)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x t f(t) dt = \int_0^0 t f(t) dt = 0$$

(Η $\int_0^x t f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής)

σύμφωνα με το θ. De L' Hospital έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x t f(t) dt \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

διότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$

που σημαίνει ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

γ) Για κάθε $x > 0$ η ανισότητα γράφεται:

$$x \cdot \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt < \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt < \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x t f(t) dt < x \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^x t f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt < 0$$

Έστω η συνάρτηση:

$$h(x) = \int_0^x t f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt, \quad x \geq 0$$

$$h'(x) = x \cdot f(x) - \int_0^x f(t) dt - x \cdot f(x) = -\int_0^x f(t) dt < 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

διότι από $f(t) > 0$ προκύπτει ότι:

$$\int_0^x f(t) dt > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ (πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 0$

$$\text{ισχύει } h(x) < h(0) \text{ Αλλά } h(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0 \text{ συνεπώς}$$

$$g(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και ισχύει:

$$g(2) = \frac{1}{4} \int_0^2 t \cdot f(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 t \cdot f(t) dt + \int_1^2 t \cdot f(t) dt \right) = \int_0^1 t \cdot f(t) dt = g(1).$$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$.

Με παραγωγή των μελών της $x^2 g(x) = \int_0^x t \cdot f(t) dt$ έχουμε:

$$2x \cdot g(x) + x^2 g'(x) = x \cdot f(x) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2g(x) + x \cdot g'(x) = f(x) \text{ οπότε για } x = \xi$$

προκύπτει: $2g(\xi) + \xi \cdot g'(\xi) = f(\xi) \Leftrightarrow 2g(\xi) = f(\xi)$



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1^ο

A. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq \kappa$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in A$, τότε το κ είναι η μέγιστη τιμή της f .
2. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.
4. Αν για δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
5. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει παράγουσα στο διάστημα Δ , τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$.
6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx < \int_a^\beta g(x) dx$.

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = -2x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(0, f(0))$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $a = 2$.

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Θέμα 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w \neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$|z + w| = |z - w|.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) } \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0.$$

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή O των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O .

Μονάδες 7

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$ και

$$z = a + i \cdot f(a), w = f(\beta) - \beta i \quad \text{τότε η εξίσωση} \quad x \cdot f'(x) = f(x)$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Μονάδες 7

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ όπου $t, x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τη συνάρτηση g .

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{1+x^2} \leq g(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι: $g(x) + g(-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

- δ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ είναι $E = g(1) - \frac{1}{2} \ln 2$ τ.μ.

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία στις Γενικές εξετάσεις

ΟΕΦΕ



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

- Β. 1. Λάθος 2. Σωστό 3. Σωστό
4. Λάθος 5. Λάθος 6. Σωστό

Θέμα 2^ο

$$\alpha) f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + a)e^{-x} = (2x - x^2 - a)e^{-x} = (-x^2 + 2x - a)e^{-x}$$

$$f(0) = a \text{ και } f'(0) = -a$$

$\varepsilon : y - a = -ax \Leftrightarrow y = -ax + a$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$M(0, f(0))$. Ταυτίζεται με την $y = -2x + 2$ όταν $-a = -2$ και $a = 2$

δηλαδή όταν $a = 2$.

- β) Για $a = 2$ είναι $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$ και $f'(x) = (-x^2 + 2x - 2)e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι $-x^2 + 2x - 2 < 0$ και $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 2)e^{-x}] = +\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 2) \cdot e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

- δ) Από (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(\mathbb{A}) = (0, +\infty)$ το οποίο περιέχει το 2007. Η $f(x) \downarrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 3ο

$$\alpha) |z + w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = 0 \stackrel{(1)}{=} z \cdot \overline{w} + \overline{z \cdot w} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0$$

β) Ισχύει $z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = 0 \Leftrightarrow$ (ερώτημα (α)) $z \cdot \overline{w} = -\overline{z} \cdot w$. Διαιρούμε με

$$w \overline{w} = |w|^2 \text{ και έχουμε } \frac{z}{w} = -\frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ που σημαίνει ότι } \frac{z}{w} \text{ φανταστικός.}$$

γ) Αν Α, Β οι εικόνες των z, w τότε $(OA) = |z|$, $(OB) = |w|$ και

$$(AB) = |z - w|.$$

$$\text{Αρκεί ότι } (OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0 \text{ ισχύει.}$$

β' μέθοδος

Η ισότητα $|z + w| = |z - w|$ γράφεται ισοδύναμα $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow$

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \text{ Άρα } \angle AOB = 90^\circ$$

γ' μέθοδος

Αν Γ η 4η κορυφή του παραλληλόγραμμου με πλευρές ΟΑ και ΟΒ, τότε

$$(OG) = |z + w| \text{ και } (AB) = |z - w| \text{ επειδή } |z + w| = |z - w| \text{ είναι}$$

$$(OG) = (AB). \text{ Επομένως } OAGB \text{ ορθογώνιο.}$$

δ) Είναι

$$z \cdot \overline{w} = [a + i \cdot f(a)][f(\beta) + \beta i] = a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) + [a \cdot \beta + f(a)f(\beta)]i$$

$$\text{οπότε } \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta}.$$

Θα αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) η εξίσωση

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0. \text{ Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για}$$

$$\text{την } h(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ στο } [a, \beta], \text{ άρα υπάρχει } x_0 \in (a, \beta) \dots$$

Θέμα 4ο

α) $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και $g''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$-$	
$g(x)$			

Σ. Κ.

β) Για $x = 0$ είναι $0 \leq g(0) \leq 0$. Ισχύει η ισότητα

Για κάθε $x > 0$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιος ώστε } g'(\xi) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x)}{x} \text{ Έχουμε}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \leq g'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow g'(x) \leq g'(\xi) \leq g'(0). \text{ Ισχύει διότι } g'(x) \downarrow \text{ στο } [0, +\infty) \text{ και}$$

$$0 < \xi < x \text{ (ερώτημα α)}$$

β' μέθοδος

Θα αποδείξουμε ότι:

$$g(x) \geq \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \geq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Έστω } h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{x}{1+x^2}, x \geq 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 1+x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } h \text{ συνεχής στο } [0, +\infty). \text{ Άρα}$$

$$h(x) \uparrow \text{ στο } [0, +\infty). \text{ Επομένως για κάθε } x \geq 0 \text{ ισχύει } h(x) \geq h(0) = 0.$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι: $g(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

γ) Έστω $h(x) = g(x) + g(-x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt.$

$$\text{Είναι } h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \text{ άρα } h(x) = c$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } h(0) = 0. \text{ Επομένως } h(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β' μέθοδος

$$\text{Είναι } g(x) + g(-x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$\text{Στο } g(-x) \text{ θέτουμε } t = -u \text{ τότε } dt = -du$$

Άκρα ολοκλήρωσης

Για $t = 0, u = 0$ και για $t = 0, u = x$.

$$\text{Άρα } g(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt = -\int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$$

Επομένως ...

δ) Αφού $f(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0$ τότε $g(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt > 0$. Άρα

$$E = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x' \cdot g(x) dx = [x \cdot g(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x) dx =$$

$$= g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = g(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(1+x^2))' dx =$$

$$= g(1) - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2} \ln 2 \text{ τ.μ.}$$



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των z_1 και z_2 είναι το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β. Είναι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

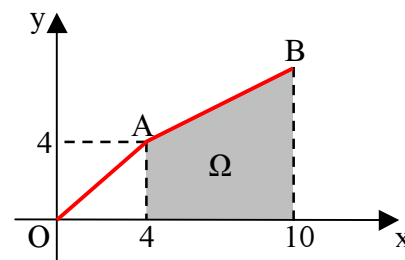
γ. Είναι: $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

δ. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με $z_1 \neq z_2$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

- Γ. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος που η γραφική της παράσταση αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα OA και AB . Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω είναι $E(\Omega) = 36$ τ.μ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



α. $F(0) =$ β. $F(4) =$ γ. $F(10) =$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \lambda, & \text{αν } x > 0 \\ (\mu - 1)x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- α. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η f να είναι συνεχής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- β. Να βρείτε την τιμή του μ , ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

- γ. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

- δ. Για $\lambda = 1$ και $\mu = 2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{\pi} f(x) dx$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. i. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

- ii. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x}$, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- β. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- γ. Να παραστήσετε γραφικά την f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

- δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f'(x)$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \ln \frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύουν:

$$\int_1^x f(t) dt - 2 = x \int_0^x g(t) dt \quad (1) \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0 \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2g(0)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. $\int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

δ. Η εξίσωση $f(x) = 2g(x) + 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. α.** Βλέπε Πόρισμα σελίδα 251 σχολικού βιβλίου.
β. Βλέπε σελίδα 224 σχολικού βιβλίου.
- B. α.** (Σ), **β.** (Σ), **γ.** (Σ), **δ.** (Σ).
- Γ. α.** 0, **β.** 8, **γ.** 44

ΘΕΜΑ 2^ο

- α.** Η f είναι συνεχής για $x < 0$, ως πολυωνυμική και για $x > 0$, ως άθροισμα της τριγωνομετρικής ημχ με την σταθερή $c(x) = \lambda$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x + \lambda) = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((\mu - 1)x + 1) = 1$$

Ακόμα $f(0) = 1$. Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\lambda = 1$.

- β.** Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \lambda - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\mu - 1)x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\mu - 1)x}{x} = \mu - 1$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \mu - 1 = 1 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\mu = 2$.

- γ.** Είναι π.χ. $f(2\pi) = f(\pi) = \lambda$, άρα η συνάρτηση δεν είναι 1-1.

δ. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & \text{αν } x > 0 \\ x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-2}^0 (x+1) dx + \int_0^{\pi} (\eta\mu x + 1) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^0 + [-\sigma\upsilon\nu x + x]_0^{\pi} = \pi + 2 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f'(x) = (e^{1-e^x})' = (1-e^x)' \cdot e^{1-e^x} = -e^x e^{1-e^x} = -e^{1+x-e^x}$$

Επειδή $e^{1+x-e^x} > 0$ είναι $f'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (-e^{1+x-e^x})' = -(1+x-e^x)' \cdot e^{1+x-e^x} = -(1-e^x) \cdot e^{1+x-e^x} = (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x}$$

$$\text{Έτσι: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, άρα στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Ακόμα είναι $f'(x) > 0$ στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$.

Τέλος, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$, γιατί εκατέρωθεν του αλλάζει κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σ' αυτό, αφού είναι παραγωγίσιμη.

Είναι $f(0) = e^{1-1} = e^0 = 1$ έτσι, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $(0, 1)$.

β. Θα βρούμε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-e^x}) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-e^x})$$

Θέτουμε $u = 1 - e^x$ οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 - 0 = 0$$

Τότε είναι:

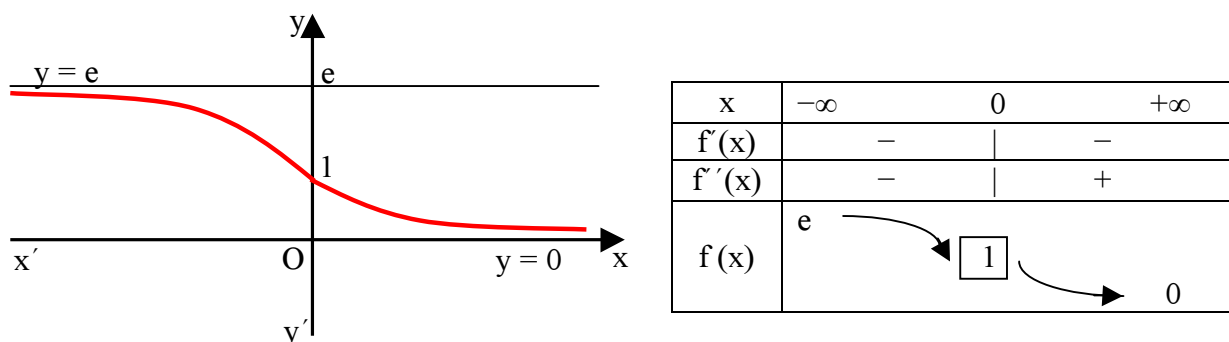
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-e^x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-e^x}) = \lim_{u \rightarrow 1} (e^u) = e$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$ και την $y = e$ στο $-\infty$.

- γ. Με βάση τις πληροφορίες των προηγούμενων ερωτημάτων σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:



- δ. Στο α ερώτημα βρήκαμε $f'(x) < 0$, οπότε $|f'(x)| = -f'(x)$ και έτσι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 |f'(x)| dx = - \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 f'(x) dx = - [f(x)]_{\ln \frac{1}{2}}^0 = -f(0) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = \\ &= -e^{1-e^0} + e^{1-e^{\ln \frac{1}{2}}} = -1 + e^{1/2} \text{ τμ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

- α. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_1^x f(t) dt$ και $\int_0^x g(t) dt$, που ορίζονται από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες, έτσι μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1), οπότε έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t) dt - 2\right)' = \left(x \int_0^x g(t) dt\right)'$$

$$\text{ή } f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt \quad (3)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ παίρνουμε: } f(0) = 0 + \int_0^0 g(t) dt = 0$$

Με $x \neq 0$ από την (3) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x}$$

και:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \right)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

Η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x g(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = \int_0^0 g(t) dt = 0$$

Επομένως, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x}$$

είναι μορφή $0/0$ και υπολογίζεται με τον κανόνα του De L' Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x g(t) dt)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1} = g(0)$$

Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \right) = 2g(0)$$

οπότε, τελικά:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2g(0)$$

β. Η (1) για $x = 1$ δίνει $-2 = \int_0^1 g(t) dt$ (4)

Επειδή η $g(x)$ δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σ' αυτό. Αν ήταν $g(x) > 0$ τότε

$$\int_0^1 g(t) dt > 0 \Leftrightarrow -2 > 0$$

Άτοπο. Άρα είναι $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Η (1) για $x = 0$ δίνει $\int_1^0 f(t) dt - 2 = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t) dt = 2$ (5)

Είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι:

- με $x \geq 0$ είναι $\int_0^x [-g(t)] dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t) dt \leq 0$, άρα: $x \int_0^x g(t) dt \leq 0$
- με $x < 0$ είναι $\int_x^0 [-g(t)] dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^0 g(t) dt > 0$, άρα: $x \int_0^x g(t) dt < 0$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από την (1) είναι:

$$x \int_0^x g(t) dt \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq 2 \quad \left[\int_1^0 f(t) dt = 2 \text{ από (5)} \right]$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$$

2^{ος} τρόπος: Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$ για την οποία $F'(x) = f(x)$. Από την (3), αφού $g(x) < 0$, βρίσκουμε:

- με $x > 0$ είναι $f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$
- με $x = 0$ είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$
- με $x < 0$ είναι $f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$

οπότε η $F(x)$ έχει μέγιστο το $F(0)$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) \leq F(0) \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$$

δ. (Απόδειξη με Rolle σε αρχική). Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x g(t) dt - 2x \text{ με } x \in [0, 1]$$

Επειδή οι f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t) dt$ και $\int_0^x g(t) dt$ ως οριζόμενες από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες. Ακόμα η $2x$ είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, άρα η $H(x)$, ως αλγεβρικό άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι:

- Παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο $(0, 1)$ με

$$H'(x) = f(x) - 2g(x) - 2$$

- συνεχής στο $[0, 1]$, ως παραγωγίσιμη σ' αυτό.
Ακόμα:

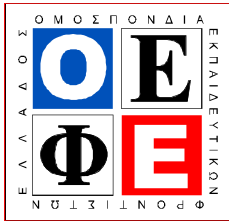
- $H(0) = 0$ και

$$\begin{aligned} H(1) &= \int_0^1 f(t) dt - 2 \int_0^1 g(t) dt - 2 \\ &= - \int_1^0 f(t) dt - 2 \int_0^1 g(t) dt - 2 \\ &= -2 - 2 \cdot (-2) - 2 = 0 \end{aligned} \quad [\text{από (4) και (5)}]$$

Επομένως, εφαρμόζεται για την $H(x)$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 2g(\xi) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2g(\xi) + 2,$$

που σημαίνει ότι το ξ είναι ρίζα στο $(0, 1)$ της εξίσωσης $f(x) = 2g(x) + 2$.



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 9

- B.** 1. Πότε η ευθεία $\psi = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

2. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 3

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

1. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$

Μονάδες 2

2. Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Μονάδες 2

3. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε η f έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα $f(a)$ και $f(b)$.

Μονάδες 2

4. Για τις συναρτήσεις f και g που έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[a, b]$ ισχύει:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

Μονάδες 2

5. Αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της $f(x)$, η $f(x) = \psi$ έχει λύση ως προς x τότε η f είναι 1-1.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{1}{z} = -1$, $z \in \mathbb{C}$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

A. $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$.

Μονάδες 4

B. $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ. $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$

Μονάδες 4

Δ. Αν $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$f(0) - 2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f(x_0) = 3x_0 - 2$.

Μονάδες 7

Ε. Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 2z_1 + 2z_2$ και A, B οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ 3^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + 2\ln x$.

A. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

Μονάδες 6

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 6

Γ. Αν $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x+2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε:

$$g(x) \geq g(x_0) \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 7

Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει: $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

A. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$.

Μονάδες 8

B. 1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο με τετμημένη $x = 1$.

Μονάδες 2

2. Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x) dx > \frac{2}{e}$.

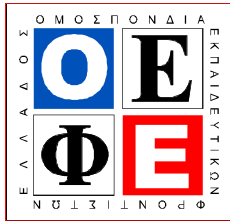
Μονάδες 7

Γ. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$ με $t > 1$.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$.

Μονάδες 3



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Σχολ. Βιβλίο σελ. 260
- B.** 1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 280
 2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 191
- Γ.** 1. Σ
 2. Λ
 3. Λ
 4. Σ
 5. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

A. $z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = -z \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$ με $z_1 z_2 = 1$ (τύποι Vieta)

$\left(\text{ή } \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 \quad z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{και}$

$z_1^2 + z_1 + 1 = 0 \Rightarrow z_1^3 + z_1^2 + z_1 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = -(z_1^2 + z_1) = -1 \quad \text{ή} \quad z_1^3 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \dots$

B. Οι αριθμοί z_1 και z_2 συζυγείς οπότε $\overline{z_1^{2009}} = \overline{z_1}^{2009} = z_2^{2009}$
 Άρα $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$ σαν άθροισμα συζυγών

Γ. $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = z_1^8 + z_1^{10} + 1 = (z_1^3)^2 \cdot z_1^2 + (z_1^3)^3 \cdot z_1 + 1 = z_1^2 + z_1 + 1 = 0$

Δ. Έστω $g(x) = f(x) - 3x + 2$, συνεχής στο $[0, 1]$ σαν άθροισμα συνεχών (f παραγωγίσιμη οπότε και $-3x + 2$ συνεχής ως πολυωνυμική με
 $g(0) = f(0) + 2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 + 2 = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} + 4 = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} + 4 = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot 1}{1} + 4 = 3 > 0$
 και $g(1) = f(1) - 3 + 2 = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{2z_2 + 2z_1}{4z_1 z_2} - \frac{5}{2} = \frac{-2}{4} - \frac{5}{2} = -3 < 0$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 - 2$$

Ε. $w = 2(z_1 + z_2) = 2(-1) = -2$ δηλαδή $\Gamma(-2,0)$, και $A\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ τότε

$$|\Gamma A| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$|\Gamma B| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Άρα $|\Gamma A| = |\Gamma B|$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. $f(x) = x + 2 + 2 \ln x$ με π.ο. $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^2} < 0 \Rightarrow f \text{ κοίλη στο } (0, +\infty)$$

Β. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + 2 \ln x) = 0 + 2 - \infty = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 + 2 \ln x) = +\infty + 2 + \infty = +\infty \text{ δηλαδή } f(A) = (-\infty, +\infty)$$

Αφού το $0 \in f(A)$ έχει η $f(x) = 0$ ρίζα x_0 στο $(0, +\infty)$, μοναδική γιατί $f \uparrow (0, +\infty)$

Γ. Θέλω $g(x) \geq g(x_0)$ δηλαδή η g να έχει ελάχιστο στο x_0 . Έχω

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(\ln x + 1)(x + 2) - x \ln x}{(x + 2)^2} = \frac{x \ln x + 2 \ln x + x + 2 - x \ln x}{(x + 2)^2} = \\ &= \frac{2 \ln x + x + 2}{(x + 2)^2} = \frac{f(x)}{(x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Αν } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

		x_0	
x			
$g'(x)$	-	○	+
$g(x)$	↘		↗
		ελ	

άρα η $g(x)$ έχει ελάχιστο στο x_0 δηλαδή $g(x) \geq g(x_0)$

- Δ.** Θέλω $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4) \Leftrightarrow f(x+4) - f(x+1) < f(x+1) - f(x-2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+4) - f(x+1)}{(x+4) - (x+1)} < \frac{f(x+1) - f(x-2)}{(x+1) - (x-2)}$$

 έχω από Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x+1, x+4)$ και $\xi_2 \in (x-2, x+1)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+4) - f(x+1)}{(x+4) - (x+1)} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x-2)}{(x+1) - (x-2)}$$
 δηλαδή θέλω

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

 Όμως f κοίλη στο $(0, +\infty)$ δηλαδή $f' \downarrow (0, +\infty)$ και $0 < x-2 < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+4$
 Θα είναι $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4^ο

- Α.** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \left(e^{-x} \frac{1}{x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x} \frac{1}{x} + c$$

 Για $x = 1$ είναι $f(1) = \frac{1}{e} + c \Rightarrow c = 0$
 Άρα $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x} \frac{1}{x}$
 Έστω $\frac{1}{x} = \omega$ τότε $x = \frac{1}{\omega}$, $\omega \in (0, +\infty)$. Άρα $f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$
 Τελικά $f(x) = x e^{-1/x}$ $x \in (0, +\infty)$.

2^η λύση:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}, x > 0$$

$$\text{Θέτω } \frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x = \frac{1}{\omega} > 0$$

$$\text{Άρα } f'(\omega) = \left(\frac{1}{\omega} + 1\right) e^{-1/\omega} \Rightarrow f'(\omega) = (\omega e^{-1/\omega})' \Rightarrow f(\omega) = \omega e^{-1/\omega} + c$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } \omega = 1 \text{ άρα } f(1) = e^{-1} + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}, \omega > 0 \text{ ή } f(x) = x e^{-1/x}, x > 0$$

Β.

1. Είναι $f'(x) = e^{-1/x} + x e^{-1/x} \frac{1}{x^2} = e^{-1/x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$f'(1) = \frac{2}{e}, \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \quad (\varepsilon)$$

2. Είναι: $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-1/x} > 0$ για $x > 0$.

Άρα η $f(x)$ είναι κυρτή στο $\in (0, +\infty)$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός του σημείου επαφής.

$$\text{Είναι } f(x) \geq \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 2]$$

$$\text{Άρα } \int_1^2 \left(f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e}\right) dx > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 \left(-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}\right) dx > 0 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx + \left[-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}\right]_1^2 > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx - \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx > \frac{2}{e}$$

Γ. $g(x) = \frac{f(x)}{x^3} = \frac{e^{-1/x}}{x^2} > 0$ στο $[1, t]$

$$\text{Άρα } E = \int_1^t g(x) dx = \int_1^t \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx = [e^{-1/x}]_1^t = e^{-1/t} - e^{-1} \text{ τ.μ.}$$

Δ. $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - e^{-1}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (e^{\omega} - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$

(Εστω $-\frac{1}{t} = \omega$, όταν $t \rightarrow +\infty$ τότε $\omega \rightarrow 0$)



Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία

παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Μονάδες 10)

B.1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 3)

B.2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 2)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ αναγκαστικά $z_1 = z_2 = 0$.

β) Αν $g(x) \neq \alpha$ κοντά στο x_0 με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$ και $\lim_{y \rightarrow \alpha} f(y) = l$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l.$$

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta)$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ και $f(x) \leq 0$ στο $[2, 5]$,

$$\text{τότε } \int_2^5 f(x)dx \geq 0.$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z = \frac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

- α) Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

(Μονάδες 6)

- β) Αν $|z|=1$ (1) και z_1, z_2, z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι:

i) Ο αριθμός $\alpha = \frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_1} + \frac{z_1+z_3}{z_2}$ είναι πραγματικός.

(Μονάδες 7)

- ii) Αν επιπλέον $z_1+z_2+z_3=0$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$$

(Μονάδες 7)

- γ) Δίνεται η ευθεία (ε): $3x+4y-12=0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ ισχύουν $x f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1)=0$.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι 1-1.

(Μονάδες 2)

- β) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
(Μονάδες 5)

ε) Να εξετασθεί η h ως προς κυρτότητα και να δείξετε ότι για κάθε x_1, x_2 με $x_2 > x_1 > 0$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\int_3^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du \geq 2x - 6 \text{ για κάθε } x \in R. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\int_1^3 f(t) dt = 2$.
(Μονάδες 7)

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι η ευθεία $4x + y - 3 = 0$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3}{x^4}$.
(Μονάδες 5)

γ) Αν για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $h(x) = \int_1^x f(t) dt$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $h'(x) > \frac{h(x)}{x-1}$.
(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + 3 = 2\xi$.
(Μονάδες 6)



Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Σχολικό βιβλίο σελ.334.

B.1. σελ. 213.

B.2. σελ. 212.

Γ. $\alpha - \Lambda$

$\beta - \Sigma$

$\gamma - \Lambda$

$\delta - \Lambda$

$\varepsilon - \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Έχουμε $z = \frac{1+2w}{1-w} \quad (w \neq 1) \Leftrightarrow z(1-w) = 1+2w \Leftrightarrow z - zw = 1+2w \Leftrightarrow$

$$2w + zw = z - 1 \Leftrightarrow w(2+z) = z - 1 \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{z-1}{z+2} \quad (z \neq -2) \Leftrightarrow w + 1 = \frac{z-1}{z+2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$w + 1 = \frac{z-1+z+2}{z+2} = \frac{2z+1}{z+2}.$$

Από την υπόθεση $|w+1| = 1$.

Άρα

$$|w+1| = \left| \frac{2z+1}{z+2} \right| = 1 \Leftrightarrow |2z+1| = |z+2| \Leftrightarrow$$

$$|2z+1|^2 = |z+2|^2 \Leftrightarrow (2z+1)(2\bar{z}+1) = (z+2)(\bar{z}+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 1 = z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3|z|^2 = 3 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

β) i) Έχουμε $|z_1| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$

Επειδή $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$ (Πρέπει να αποδειχθεί) αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{\alpha} = \alpha$.

Οπότε

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_3}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2 + z_3}{z_1}\right)} + \overline{\left(\frac{z_1 + z_3}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_2} = \\ &= \frac{1}{\frac{z_3}{z_1}} + \frac{1}{\frac{z_3}{z_2}} + \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}} + \frac{1}{\frac{z_1}{z_3}} + \frac{1}{\frac{z_2}{z_3}} + \frac{1}{\frac{z_2}{z_1}} = \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} = \\ &= \frac{z_1 + z_2}{z_3} + \frac{z_2 + z_3}{z_1} + \frac{z_1 + z_3}{z_2} = \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) Έχουμε } \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) &= \frac{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) + \left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1}\right)}{2} = \\ &= \frac{\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1}}{2} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_3} + \frac{z_1 + z_3}{z_2} + \frac{z_2 + z_3}{z_1}}{2} = \\ &= \frac{-\frac{z_3}{z_3} - \frac{z_2}{z_2} - \frac{z_1}{z_1}}{2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

γ) **1ος Τρόπος**

Έχουμε

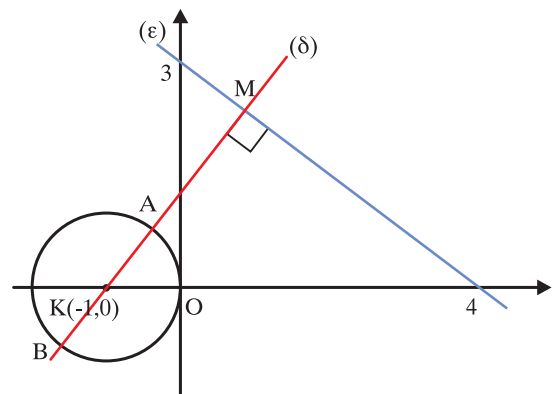
$$d(K, \varepsilon) = \frac{|3(-1) + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι:

$$(AM) = d(K, \varepsilon) - \rho = 3 - 1 = 2 \text{ και}$$

$$\text{μέγιστη } (BM) = d(K, \varepsilon) + \rho = 3 + 1 = 4.$$



2ος Τρόπος

Έχουμε $(\varepsilon) \perp (\delta) \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{4}{3}$. Άρα $(\delta): y = \frac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow 4x - 3y + 4 = 0$. Για να

βρούμε το M λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 4x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right) \text{ άρα } M\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$(KM) = \sqrt{\left(\frac{4}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{25}} = 3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι: $(AM) = (KM) - \rho = 3 - 1 = 2$ και

μέγιστη $(BM) = (KM) + \rho = 3 + 1 = 4$.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Είναι $g(x) = e^x + x$ (1). Τότε $g'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Άρα η συνάρτηση g είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε

$$xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1} \Leftrightarrow xf'(x)(e^{f(x)}+1) = x+1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)} + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow (e^{f(x)} + f(x))' = (x + \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c.$$

Για $x = 1$ έχουμε $e^{f(1)} + f(1) = 1 + c$ με $c = 0$. Άρα

$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x = e^{\ln x} + \ln x$ και λόγω της (1) έχουμε

$g(f(x)) = g(\ln x)$. Αλλά η g είναι 1-1. Άρα $f(x) = \ln x$.

γ) Είναι $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$.

$$\text{Τότε } h'(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}.$$

$$\text{Αν } h'(x) = 0 \text{ ή } 2 - \ln x = 0 \text{ ή } \ln x = 2 \text{ ή } x = e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

Η h είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, e^2]$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [e^2, +\infty)$

$$\text{Έχουμε } h_{\max} = h(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Πεδίο τιμών :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\ln x - 1) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), h(e^2) \right] \cup \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(e^2) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2} \right] \cup \left(0, \frac{1}{e^2} \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2} \right].$$

δ) Έχουμε $\left(\frac{\eta\mu x}{e} \right)^{\sigma\nu\nu x} = \left(\frac{\sigma\nu\nu x}{e} \right)^{\eta\mu x}.$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ ισχύει $\frac{\eta\mu x}{e} > 0, \frac{\sigma\nu\nu x}{e} > 0$

Λογαριθμίζουμε τη σχέση και έχουμε:

$$\ln \left(\frac{\eta\mu x}{e} \right)^{\sigma\nu\nu x} = \ln \left(\frac{\sigma\nu\nu x}{e} \right)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\nu\nu x \cdot \ln \left(\frac{\eta\mu x}{e} \right) = \eta\mu x \cdot \ln \left(\frac{\sigma\nu\nu x}{e} \right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\nu\nu x \cdot (\ln(\eta\mu x) - \ln e) = \eta\mu x \cdot (\ln(\sigma\nu\nu x) - \ln e) \Leftrightarrow \frac{\ln(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} = \frac{\ln(\sigma\nu\nu x) - 1}{\sigma\nu\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\eta\mu x) = h(\sigma\nu\nu x) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ ισχύουν οι σχέσεις $0 < \eta\mu x < 1, 0 < \sigma\nu\nu x < 1$ και

$$(0, 1) \subset (0, e^2).$$

Η h είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e^2]$. Από τη (2) έχουμε

$$\eta\mu x = \sigma\nu\nu x \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

ε) Έχουμε $h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ και

$$h''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(2 \ln x - 5)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 5}{x^3}.$$

$$h''(x) = 0 \quad \text{ή} \quad 2 \ln x - 5 = 0 \quad \text{ή} \quad \ln x = \frac{5}{2} \quad \text{ή} \quad x = e^{\frac{5}{2}}.$$

x	0	$e^{5/2}$	$+\infty$
$h''(x)$	-	$\circ$	+
$h'(x)$	$\nwarrow$		$\nearrow$

Η h είναι κοίλη στο διάστημα $(0, e^{5/2}]$.

Η h είναι κυρτή στο διάστημα $[e^{5/2}, +\infty)$.

$$h'_{\min}(e^{5/2}) = \frac{2 - \ln e^{5/2}}{(e^{5/2})^2} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{e^5} = -\frac{1}{2e^5}.$$

Τότε $h'(x) \geq -\frac{1}{2e^5}$ για κάθε $x > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πηλίκo παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (x_1, x_2) \text{ ώστε } h'(\xi) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3).$$

Αλλά για κάθε $x > 0$ επομένως και για το $\xi > 0$ ισχύει $h'(\xi) \geq -\frac{1}{2e^5}$ (4).

$$\text{Από τις (3) και (4) έχουμε } \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \int_3^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du - 2x + 6 \geq 0$.

Έχουμε $g(3) = 0$. Τότε $g(x) \geq g(3)$ και η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.

Από το Θεώρημα Fermat ισχύει $g'(3) = 0$. Αλλά $g'(x) = \int_1^x f(t) dt - 2$

$$\text{και για } x = 3 \text{ έχουμε } g'(3) = \int_1^3 f(t) dt - 2 = 0 \text{ ή } \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

β) Για $x = 0$ και $y = f(0)$ έχουμε
 $4 \cdot 0 + f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 3 \text{ και } f'(0) = -4.$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3}{x^4} &\stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3 \right)'}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 3x^2}{4x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4} \cdot f'(0) = \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

γ) 1^{ος} Τρόπος

Για κάθε $x > 1$ η ανίσωση γίνεται:

$$(x-1)h'(x) > h(x) \Leftrightarrow (x-1)h'(x) - h(x) > 0$$

Θέτουμε $K(x) = (x-1)h'(x) - h(x) = (x-1)f(x) - h(x)$ για $x \in [1, +\infty)$.

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} K'(x) &= f(x) + (x-1)f'(x) - h'(x) = f(x) + (x-1)f'(x) - f(x) = \\ &= (x-1)f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1. \end{aligned}$$

Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$.

$$\text{Επομένως } x > 1 \Leftrightarrow K(x) > K(1) \Leftrightarrow (x-1)h'(x) - h(x) > 0.$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(u) = \int_1^u f(t)dt$, $u \in [1, x]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ με $h'(u) = f(u)$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$.

Αλλά $h(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$ οπότε $h'(\xi) = \frac{h(x)}{x - 1}$ (1). Επίσης $h'(x) = f(x)$

και $h''(x) = f'(x) > 0$. Άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 1$ και για $\xi < x$ έχουμε $h'(\xi) < h'(x)$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $h'(x) > \frac{h(x)}{x - 1}$.

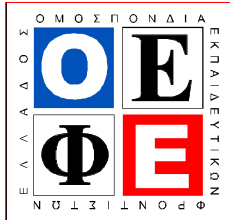
δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_1^x f(t)dt + 3x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Η φ είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x) = f(x) + 3 - 2x$.

$$\text{Είναι } \left. \begin{aligned} \varphi(1) &= 2 \\ \varphi(3) &= \int_1^3 f(t)dt + 9 - 9 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(1) = \varphi(3)$$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ ώστε $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + 3 - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + 3 = 2\xi$.



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

A. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

B. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z είναι $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

2. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

3. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, τότε έχει πεδίο ορισμού την τομή $A \cap B$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

4. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

5. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 4x^3 + 12\lambda x^2 + (\lambda - 1)x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ καμπή.

α. i. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. i. Να βρείτε την αρχική της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 3

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\eta \mu x) + f(\sigma \upsilon \nu x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και $f(0) + f(1) = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii. Υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) + x_0 = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. Έστω, επιπλέον, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma \upsilon \nu x)}{\eta \mu x}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4

- A.** Να αποδείξετε ότι $e^x - x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Πότε ισχύει η ισότητα $e^x - x = 1$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

- B.** Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ θεωρούμε το μιγαδικό z , με:

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + ix \int_0^1 e^{f(x-t)} dt \quad \text{και} \quad \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(a) - 1,$$

όπου $a > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. i.** $\frac{z}{1+i} = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- ii.** $e^{f(x)} = f(x) + e^x$, για κάθε $x \geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

- β.** Η f είναι γνησίως αύξουσα.

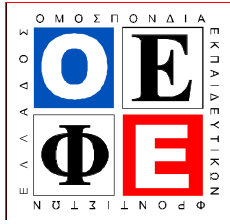
ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- γ.** Η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

- δ.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, a)$ τέτοιο, ώστε $\alpha f'(\xi) = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

- A.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 194, το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
- B.** Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.
- Γ.** Βλέπε σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου, αμέσως μετά την διατύπωση του θεωρήματος Rolle.
- Δ.**
1. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 91:

$$z + \bar{z} = 2\alpha \quad \text{με } \alpha = \operatorname{Re}(z).$$
 2. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 185 με $a = e$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 3. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142:

$$\{x/x \in A \text{ και } x \in B, \quad \text{με } g(x) \neq 0\}$$
 4. Σωστό. Βλέπε το ΣΧΟΛΙΟ στη σελίδα 218 του σχολικού βιβλίου.
 5. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 336 τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

ΘΕΜΑ 2

- α. i.** Η f , ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
- $$f'(x) = 12x^2 + 24\lambda x + \lambda - 1,$$
- $$f''(x) = 24x + 24\lambda$$
- Επειδή στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει καμπή, είναι $f''(-1) = 0$:
- $$f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -24 + 24\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$
- ii.** Επειδή $\lambda = 1$ είναι $\boxed{f(x) = 4x^3 + 12x^2}$ και
- $$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 24x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$
- $$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 24x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$
- Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο $[-1, +\infty)$.

β. Θέτουμε $u = f(x)$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (4x^3 + 12x^2) = 0$$

είναι

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ. i. Η ζητούμενη αρχική είναι η

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

με c σταθερά, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = (x^4 + 4x^3 + c)' = 4x^3 + 12x^2 = f(x)$$

Το σημείο $(0, 1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της F , οπότε $F(0) = 1$:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως

$$\boxed{F(x) = x^4 + 4x^3 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν E ισούται με το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-3}^0 |f(x)| dx$$

Στο διάστημα $[-3, 0]$ είναι $f(x) = 4x^2(x + 3) \geq 0$, άρα

$$E = \int_{-3}^0 f(x) dx$$

Τότε

$$E = F(0) - F(-3) = 1 + 26 = 27 \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 3

α. i) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = \frac{\pi}{4}$ και παίρνουμε:

$$f\left(\eta\mu \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πάλι, με $x = 0$ παίρνουμε:

$$f(\eta\mu 0) + f(\sigma\upsilon\nu 0) = 1 \Leftrightarrow f(0) + f(1) = 1$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) + x - 1, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

- Η g είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων της f , και της $x - 1$.
- Είναι $g(0) = f(0) - 1$ και $g(1) = f(1) \stackrel{(ai)}{=} 1 - f(0)$, οπότε

$$g(0) \cdot g(1) = -[f(0) - 1]^2 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση:

Αν $f(0) = 1$, τότε από (1) $\Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$. Η g θα έχει ρίζα το $x_0 = 0$ ή το $x_0 = 1$

2^η περίπτωση:

Αν $f(0) \neq 1$, τότε από την (1) είναι: $g(0) \cdot g(1) < 0$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Bolzano για την g στο $[0, 1]$, έτσι θα υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1,$$

το οποίο αποδειξτε το ζητούμενο.

β. i. Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα της f , η οποία από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη, και της πολωνυμικής $-\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$, με παράγωγο

$$h'(x) = f'(x) - \sqrt{2}$$

- Η h έχει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Πραγματικά, είναι

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Ακόμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Το $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h .

Επομένως, εφαρμόζεται το θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο $h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$:

$$h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

$$y - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

ii) Είναι

$$f(0) + f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1 - f(0)$$

και

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 \Leftrightarrow f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 - f(\eta\mu x).$$

Αντικαθιστούμε στο όριο και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - f(0)) - (1 - f(\eta\mu x))}{\eta\mu x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x - 0} \quad (2) \end{aligned}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $y = \eta\mu x$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x) = \eta\mu 0 = 0$$

το y τείνει στο 0. Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \quad (3)$$

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, από τον ορισμό της $f'(0)$ είναι

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(0) \quad (4)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την $f'(0)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης $f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} [f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x)]' &= (1)' \Leftrightarrow [f(\eta\mu x)]' + [f(\sigma\upsilon\nu x)]' = 0 \\ &\Leftrightarrow (\eta\mu x)' f'(\eta\mu x) + (\sigma\upsilon\nu x)' f'(\sigma\upsilon\nu x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(\eta\mu x) - \eta\mu x \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = 0 \end{aligned}$$

Από εδώ, για $x = 0$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 0 \cdot f'(\eta\mu 0) - \eta\mu 0 \cdot f'(\sigma\upsilon\nu 0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (2), (3) και (4):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x} = f'(0) = 0$$

ΘΕΜΑ 4

A. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = e^x - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως η g , ως συνεχής στο $x_0 = 0$:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

άρα, έχει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$, οπότε

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνουμε, ότι η ισότητα

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow e^x = x + 1$$

αληθεύει ακριβώς όταν $x=0$, αφού η θέση ελαχίστου της συνάρτησης είναι μόνον η $x = 0$.

- B. α. i.** Θέτουμε $u = x - xt$, οπότε $du = -xdt$. Για $t = 0$ είναι $u = x$ και για $t = 1$ είναι $u = 0$. Τότε:

$$x \int_0^1 e^{f(x-xt)} dt = \int_x^0 e^{f(u)} (-du) = \int_0^x e^{f(u)} du = \int_0^x e^{f(t)} dt.$$

Τότε για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + i x \int_0^1 e^{f(x-xt)} dt = \int_0^x e^{f(t)} dt + i \int_0^x e^{f(t)} dt$$

οπότε

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

Στην συνέχεια

$$\begin{aligned} z &= \int_0^x e^{f(t)} dt + i \int_0^x e^{f(t)} dt \Leftrightarrow z = (1 + i) \int_0^x e^{f(t)} dt \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{1 + i} = \int_0^x e^{f(t)} dt \end{aligned}$$

Επειδή $e^{f(t)} > 0$, για κάθε $x \geq 0$ είναι $\int_0^x e^{f(t)} dt \geq 0$, επομένως

$$\frac{z}{1 + i} = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \geq 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

- ii.** Βρήκαμε $\frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)} dt \geq 0$, οπότε

$$\left| \frac{z}{1+i} \right| = \left| \int_0^x e^{f(t)} dt \right| = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

άρα

$$\frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x e^{f(t)} dt, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Σύμφωνα με την σχέση αυτή και την δεύτερη από τις δοσμένες είναι:

$$\int_0^x e^{f(t)} dt = \int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(a) - 1 \quad (1), \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Επειδή η f και η e^t είναι συνεχείς, θα είναι συνεχείς

- η σύνθεση $e^{f(t)}$ και
- το άθροισμα $f(t) + e^t$,

επομένως οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x e^{f(t)} dt, \quad \int_0^x [f(t) + e^t] dt$$

είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^x e^{f(t)} dt \right)' = e^{f(x)}, \quad \left(\int_0^x [f(t) + e^t] dt \right)' = f(x) + e^x$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left(\int_0^x e^{f(t)} dt \right)' = \left(\int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(\alpha) - 1 \right)'$$

ή, τελικώς:

$$e^{f(x)} = f(x) + e^x, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

β. Για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$ από την (α.ii) έχουμε

$$e^{f(x_1)} = f(x_1) + e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{f(x_1)} - f(x_1)$$

$$e^{f(x_2)} = f(x_2) + e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2} = e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{f(x_1)} - f(x_1) < e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

με g την συνάρτηση του ερωτήματος Α, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, στο οποίο παίρνει τιμές η f . Επομένως

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$,

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } f(x_1) < f(x_2)$$

που σημαίνει, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f ως γνησίως αύξουσα, είναι 1-1, άρα έχει αντίστροφη. Πάλι η f , ως γνησίως αύξουσα και συνεχής, έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

- Η σχέση $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ επειδή $f(x) \geq 0$ δίνει

$$e^{f(x)} \geq e^x \Leftrightarrow f(x) \geq x$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Για $x = 0$ πάλι από την $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ παίρνουμε

$$e^{f(0)} = f(0) + 1.$$

Έτσι, το $f(0)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^x = x + 1$. Από το ερώτημα Α. η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση $x = 0$, που συνεπάγεται, ότι

$$\boxed{f(0) = 0} \quad (2)$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$$\left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Έστω $y = f(x)$ με $x \geq 0$. Από την $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ έχουμε:

$$e^y = y + e^x \Leftrightarrow e^x = e^y - y$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση ως προς $x \geq 0$, αφού $e^y - y \geq 1$.

Τότε:

$$e^x = e^y - y \Leftrightarrow x = \ln(e^y - y)$$

Για την τιμή αυτή του x είναι $f(x) = y$. Πραγματικά

$$e^{f(\ln(e^y - y))} - f(\ln(e^y - y)) = e^{\ln(e^y - y)} = e^y - y$$

Η g ως γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ είναι 1-1, έτσι $f(\ln(e^y - y)) = y$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in [0, +\infty)$$

δ. Για $x = 0$ από την (1) παίρνουμε:

$$\int_0^0 e^{f(t)} dt = \int_0^0 [f(t) + e^t] dt + f(\alpha) - 1 \Leftrightarrow f(\alpha) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(\alpha) = 1} \quad (3)$$

Για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, γιατί είναι συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα, ως παραγωγίσιμη από υπόθεση στο $(0, +\infty)$. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi \in (0, \alpha)$ με

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = f'(\xi)$$

ή λόγω των (2) και (3):

$$\frac{1 - 0}{\alpha} = f'(\xi) \quad \text{ή} \quad \alpha f'(\xi) = 1.$$

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

A3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

Μονάδες 6

A4. Να βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:

i. Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 2

ii. $i^{4v+3} = i$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Μονάδες 2

iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

iv. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος $y = f'(x_0)$.

Μονάδες 2

v. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ , στα οποία $f'(x_0) \neq 0$, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της f .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-2}$ και $g(x) = \ln x + 2$.

B1. Να βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(e^{-2}, 2)$.

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1 + 3\alpha^2) f(x) = e^{\int_x^1 2t f(t) dt},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

ii. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^a t f(t) dt$ είναι ανεξάρτητη του α .

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .

Μονάδες 8

Γ4. Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x = \alpha$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x + 2} = -1 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(-2) = 1$ και $f(x) \leq x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_0 \in (-2, 0)$.

Μονάδες 6

Δ3. Η εξίσωση

$$f' \left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt \right) = f'(0)$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$ την $x = 5$.

Μονάδες 7

Δ4. Ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει

$$f(|z + i|) \leq f(|z| + 1)$$

είναι φανταστικός.

Μονάδες 6

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 217 την απόδειξη του Θεωρήματος.
A2. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 150 τον ορισμό του μεγίστου.
A3. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 234 την απόδειξη του τύπου $(a^x)' = a^x \ln a$.
A4. i. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 152 τα σχόλια.
 ii. Ψευδής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 90 τις δυνάμεις του i με $v = 3$.
 iii. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 165 το Θεώρημα 1^ο.
 iv. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 241 τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής.
 v. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 261 το σχόλιο του Θεωρήματος του Fermat.

ΘΕΜΑ Β

B1. Τα πεδία ορισμού των f, g είναι αντίστοιχα τα $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = (0, +\infty)$

- Η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο
 $\{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x > 0 \text{ και } g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

Για τέτοιες τιμές του x , έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)-2} = e^{\ln x} = x$$

Ωστε $(f \circ g)(x) = x$ με $x \in (0, +\infty)$

- Η $g \circ f$ ορίζεται στο σύνολο
 $\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^{x-2} > 0\} = \mathbb{R}$

Για τέτοιες τιμές του x , έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = \ln f(x) + 2 = \ln e^{x-2} + 2 = (x-2) + 2 = x$$

Ωστε $(g \circ f)(x) = x$ με $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, επομένως δεν είναι ίσες.

B2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 2 \neq x_2 - 2 \Rightarrow e^{x_1-2} \neq e^{x_2-2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως η f είναι 1-1 και έχει αντίστροφη. Έχουμε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \ln y, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln y + 2, \quad y > 0$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln x + 2, \quad x > 0$$

B3 Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^{x-2} - \ln x - 2, \quad x \in [e^{-2}, 2]$.

- Η h είναι συνεχής. Πράγματι η συνάρτηση e^{x-2} είναι συνεχής, ως σύνθεση της πολυωνυμικής $x - 2$ με την εκθετική e^x , οι οποίες είναι συνεχείς. Επομένως η h είναι συνεχής, γιατί προκύπτει από πράξεις των συνεχών συναρτήσεων e^{x-2} , $\ln x$ (λογαριθμική) και 2 (σταθερή).
- Είναι

$$h(e^{-2}) = e^{e^{-2}-2} - \ln e^{-2} - 2 = e^{e^{-2}-2} + 2 - 2 = e^{e^{-2}-2} > 0$$

και

$$h(2) = e^{2-2} - \ln 2 - 2 = -1 - \ln 2 < 0$$

Οπότε:

$$h(e^{-2}) \cdot h(2) = e^{e^{-2}-2} (-1 - \ln 2) < 0$$

Εφαρμόζεται, επομένως το Θεώρημα του Bolzano για την h στο διάστημα $[e^{-2}, 2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ με $h(x_0) = 0$. Τότε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} - \ln x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = \ln x_0 + 2$$

Αυτό σημαίνει, ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ και αποδεικνύει το ζητούμενο.

B4. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-2}}{x} = 0$, γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^2} = \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \frac{1}{e^2} \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Ακόμα, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{x}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 2) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε από

το αντίστοιχο θεώρημα του De L' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = 0$$

$$\Omega\sigma\tau\epsilon \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i Είμαι $1+3\alpha^2 \neq 0$, οπότε:

$$f(x) = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \quad (1)$$

Η συνάρτηση $2tf(t)$ είναι συνεχής, ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $2t$ και $f(t)$, οπότε η συνάρτηση που ορίζεται από το ολοκλήρωμα $\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η $-\int_1^x 2tf(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη. Επομένως η συνάρτηση $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, της $-\int_1^x 2tf(t)dt$ με την εκθετική e^x . Το γινόμενο της επί τον αριθμό $\frac{1}{1+3\alpha^2}$,

δηλαδή η $f(x) = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+3\alpha^2} \left(e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \right)' = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \left(-\int_1^x 2tf(t)dt \right)' \\ &= f(x)(-2xf(x)) = -2xf^2(x) \end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$, αφού $1+3\alpha^2 > 0$ και $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} > 0$. Έτσι

$$f'(x) = -2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = (x^2)'$$

Επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c \quad (2)$$

Η (1) για $x = 1$ δίνει $f(1) = \frac{1}{1+3\alpha^2}$.

Η (2) δίνει $\frac{1}{f(1)} = 1 + c \Leftrightarrow 1 + 3\alpha^2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 3\alpha^2$

Άρα η (2) δίνει $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε

$$\int_0^{\alpha} t f(t) dt = \int_0^{\alpha} \frac{t}{t^2 + 3\alpha^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \frac{(t^2 + 3\alpha^2)'}{t^2 + 3\alpha^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln |t^2 + 3\alpha^2| \right]_0^{\alpha}$$

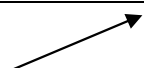
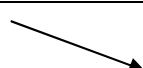
$$= \frac{1}{2} \ln 4\alpha^2 - \frac{1}{2} \ln 3\alpha^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη του α .

Γ3. Η f , ως ρητή, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} \right)' = -\frac{(x^2 + 3\alpha^2)'}{(x^2 + 3\alpha^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 3\alpha^2)^2}$$

Το πρόσημο της f' με την μονοτονία και το ακρότατο της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f		$\frac{1}{3\alpha^2}$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = \frac{1}{3\alpha^2}$

Για την f'' έχουμε:

$$f''(x) = -2 \left[\frac{x}{(x^2 + 3\alpha^2)^2} \right]' = -2 \frac{(x^2 + 3\alpha^2)^2 - x[(x^2 + 3\alpha^2)']}{(x^2 + 3\alpha^2)^4} =$$

$$= -2 \frac{(x^2 + 3\alpha^2)^2 - 4x^2(x^2 + 3\alpha^2)}{(x^2 + 3\alpha^2)^4} = -2 \frac{x^2 + 3\alpha^2 - 4x^2}{(x^2 + 3\alpha^2)^3} = 6 \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + 3\alpha^2)^3}$$

Το πρόσημο της f'' με την κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	$- \alpha $	$ \alpha $	$+\infty$	
f''	+	0	0	+	
f		$\frac{1}{4\alpha^2}$ $\sigma.\kappa$		$\frac{1}{4\alpha^2}$ $\sigma.\kappa$	

Η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -|\alpha|]$, $[|\alpha|, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-|\alpha|, |\alpha|]$. Έχει σημεία καμπής τα $(-|\alpha|, 1/4\alpha^2)$ και $(|\alpha|, 1/4\alpha^2)$

Η f , ως συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Στα $+\infty$ και $-\infty$ έχουμε:

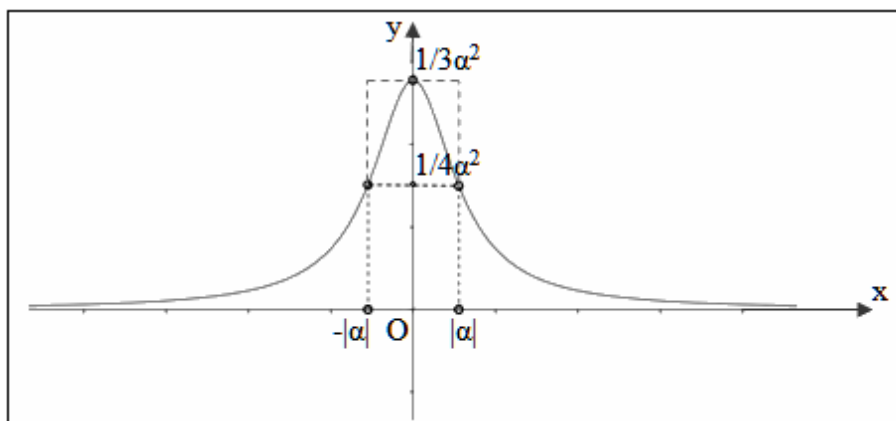
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τον άξονα των x . Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	$- \alpha $	0	$ \alpha $	$+\infty$	
f'		+	0	–	–	
f''		+	0	–	0	+
f		$\frac{1}{4\alpha^2}$ $\sigma.\kappa$	$\frac{1}{3\alpha^2}$ max	$\frac{1}{4\alpha^2}$ $\sigma.\kappa$		0

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:



Παρατήρηση. Η f είναι άρτια αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 3\alpha^2} = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = f(x)$$

Επομένως μπορούμε να την μελετήσουμε στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να επεκτείνουμε τα συμπεράσματα στο $\mathbb{R}$.

- Γ4.** Το ζητούμενο εμβαδό (βλέπε τη γραφική παράσταση της f) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό $E_1 = |\alpha| \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4|\alpha|}$ του ορθογωνίου που ορίζεται από τους

άξονες και τις ευθείες $x = \alpha$, $y = \frac{1}{4\alpha^2}$, και μικρότερο από το εμβαδό

$E_2 = |\alpha| \frac{1}{3\alpha^2} = \frac{1}{3|\alpha|}$ του ορθογωνίου που ορίζεται από τους άξονες και τις

ευθείες $x = \alpha$, $y = \frac{1}{3\alpha^2}$. Επομένως $\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$

Αλλιώς: Με $\alpha > 0$, επειδή $f(x) > 0$ είναι $E = \int_0^\alpha |f(x)| dx = \int_0^\alpha f(x) dx$. Η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \alpha]$, οπότε για $x \in [0, \alpha]$ είναι

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{3\alpha^2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \geq 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \geq 0$$

Επειδή οι αντίστοιχες ισότητες δεν ισχύουν σε όλο το $[0, \alpha]$, έχουμε

$$\int_0^\alpha \left[f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \right] dx > 0 \text{ και } \int_0^\alpha \left[\frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \right] dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha f(x) dx - \left[\frac{x}{4\alpha^2} \right]_0^\alpha > 0 \text{ και } \left[\frac{x}{3\alpha^2} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha f(x) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow E - \frac{1}{4\alpha} > 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha} - E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha} < E < \frac{1}{3\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Με $\alpha < 0$ θα εργαστούμε ομοίως.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x+2}, x \neq -2$$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -1 \quad (1)$$

και

$$f(x) = (x+2)g(x) + 2e^{x+2}, x \neq -2 \quad (2)$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -2} [g(x)(x+2) + 2e^{x+2}] = \lim_{x \rightarrow -2} [g(x)(x+2)] + \lim_{x \rightarrow -2} 2e^{x+2} = 0 + 2 = 2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$$

Η f , ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = -2$, έτσι

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(-2) = 2 \quad (3)$$

Έχουμε, με $x \neq -2$

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \stackrel{(1),(3)}{=} \frac{(x+2)g(x) + 2e^{x+2} - 2}{x + 2} = \frac{(x+2)g(x)}{x + 2} + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2} = g(x) + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2}$$

Το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2}$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(e^{x+2} - 1)'}{(x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow -2} (e^{x+2}) = e^0 = 1$$

Επομένως, εφαρμόζεται ο αντίστοιχος κανόνας του De L' Hospital σύμφωνα με το οποίο βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(e^{x+2} - 1)'}{(x + 2)'} = 1$$

Τότε

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[g(x) + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) + 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2} = 1$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η C_f είναι κοίλη, γιατί $f''(x) < 0$ στο $\mathbb{R}$. Επομένως τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της στο σημείο της $A(-2, f(-2))$, εκτός του σημείου επαφής που είναι κοινό σημείο. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y - 2 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 4$$

Άρα $f(x) \leq x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται και με τη βοήθεια της συνάρτησης $T(x) = f(x) - x - 4$, η οποία έχει μέγιστο το $T(-2) = 0$.

Δ2. Είναι $f(-2) = f(0) = 2$. Ακόμα η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 0)$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[-2, 0]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Επειδή $f''(x) < 0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι μοναδική της ρίζα και

- για κάθε $x \in (-\infty, x_0)$ είναι $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$
- για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ είναι $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

Άρα η f ως συνεχής έχει μέγιστο (ολικό) το $f(x_0)$ με $x_0 \in (-2, 0)$.

Δ3. Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1-1, οπότε

$$f' \left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt \right) = f'(0) \Leftrightarrow \int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt = 0 \quad (4)$$

Αρκεί να δείξουμε, ότι η (4) έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x = 5$.

Πράγματι, για $x = 5$ η (4) επαληθεύεται, γιατί γίνεται $\int_0^0 f(t-x)dt = 0$.

Για να δείξουμε την μοναδικότητα της ρίζας θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^{2(x-5)} f(t-x)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε $t-x=u$, οπότε $dt=du$. Για $t=0$ το $u=-x$ και για $t=2(x-5)$ το $u=x-10$, επομένως

$$h(x) = \int_{-x}^{x-10} f(u)du = \int_0^{x-10} f(u)du - \int_0^{-x} f(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, επομένως και οι συνθέσεις των $x-10$ και $-x$ με την φ είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^{x-10} f(u)du \right)' = (x-10)' f(x-10) = f(x-10),$$

$$\left(\int_0^{-x} f(u)du \right)' = (-x)' f(-x) = -f(-x)$$

Επομένως η h είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x)$$

Επειδή, από το ερώτημα Δ1 $f(x) \leq x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x) \leq (x-10) + 4 + (-x) + 4 = -2 < 0$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως και 1-1, που σημαίνει ότι η ρίζα της είναι μοναδική. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

- Δ4.** Στο ερώτημα Δ1 δείξαμε ότι $f'(x) < 0$ στο $(x_0, +\infty)$ με $x_0 \in (-2, 0)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Είναι $|z+i| \geq 0$ και $|z|+1 \geq 1 > 0$, αφού το μέτρο κάθε μιγαδικού είναι μη αρνητικός αριθμός. Τότε, με $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε:

$$f(|z+i|) \leq f(|z|+1) \Leftrightarrow |z+i| \geq |z|+1$$

$$\Leftrightarrow |x+(y+1)i| \geq |x+iy|+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} \geq \sqrt{x^2+y^2}+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2} \right)^2 \geq \left(\sqrt{x^2+y^2}+1 \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1 \geq x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+1$$

$$\Leftrightarrow y \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } y^2 \geq \left(\sqrt{x^2+y^2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } x=0, \text{ άρα } z=iy, y \in \mathbb{R}^+, \text{ φανταστικός.}$$